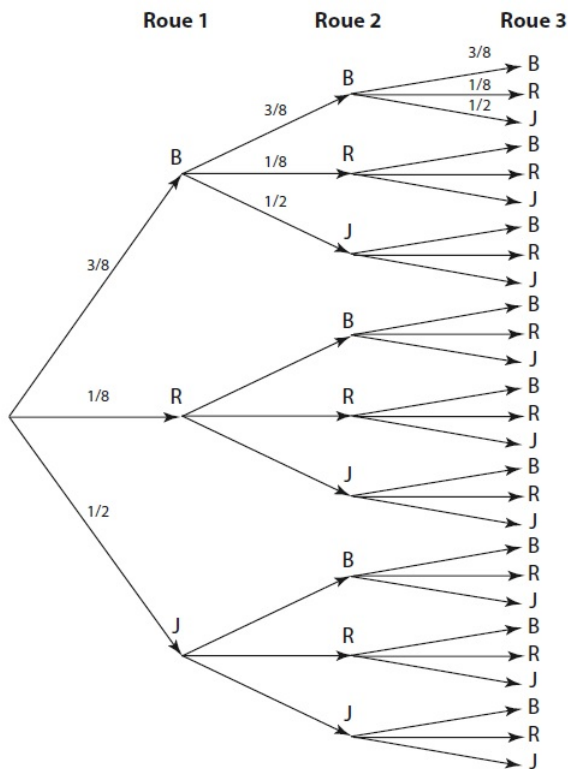


4. Correction des exercices

Exercice 7.1 1°)



2.a) Loi de probabilité de G :

k	0	8	20	64	1 024
$P(G = k)$	$\frac{348}{512}$	$\frac{72}{512}$	$\frac{64}{512}$	$\frac{27}{512}$	$\frac{1}{512}$

Remarque : pour $P(X = 0)$, il est plus simple de calculer le complément à 1 de la somme des autres probabilités que d'utiliser le calcul des probabilités à partir des différents chemins.

2.b) $E(G) = 0 \times \frac{348}{512} + 8 \times \frac{72}{512} + 20 \times \frac{64}{512} + 64 \times \frac{27}{512} + 1024 \times \frac{1}{512} = \frac{4608}{512} = 9$ (en €).

Cette loterie est favorable à l'organisateur. L'organisateur reçoit 12 € par ticket, donc il peut espérer un bénéfice moyen de 3 € par ticket.

Exercice 7.2 1°) La prise de commande par un client se solde soit par un succès (avec la probabilité $p = 0,1$), soit par un échec : c'est une épreuve de Bernoulli de paramètre p (voir la Définition 7.1). Cette épreuve de Bernoulli est répétée chaque jour 8 fois de façon indépendante. On est donc dans le cas d'un schéma de Bernoulli d'ordre 8. X indique le nombre de succès, donc X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(8; 0,1)$ (Définition 7.2).

2.a) $P(X = 2) = \binom{8}{2} \times 0,1^2 \times 0,9^6 \approx 0,1488$.

2.b) $P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0,9^8 + \binom{8}{1} \times 0,1 \times 0,9^7 \approx 0,8131$.

Exercice 7.3 1. Le franchissement d'un obstacle est une épreuve de Bernoulli où la probabilité de succès est $p = 0,625$. Lors du parcours, cette épreuve est répétée huit fois de façon indépendante. Donc on est dans le cas d'un schéma de Bernoulli d'ordre 8. X indique le nombre de succès donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 8$ et $p = 0,625$. Ainsi, $E(X) = np$, soit $E(X) = 5$.

2. Durée théorique du parcours : $t = \frac{d}{v} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$ (en heures), donc $t = 12$ (en minutes).

3. On note D la variable aléatoire qui indique la durée en minutes du parcours du cavalier.

(a) Le nombre de passage avec faute est $8 - X$, donc $D = 12 + 1 \times (8 - X)$, soit $D = 20 - X$.

(b) $E(D) = 20 - E(X)$, donc $E(D) = 15$ (en minutes). Ainsi, la durée moyenne sur un grand nombre de parcours est 15 min.

Exercice 7.4 X est la variable aléatoire donnant le nombre de flèches qui touchent la cible. X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(5; \frac{7}{10})$.

$P(X = 3) = \binom{5}{3} \times \left(\frac{7}{10}\right)^3 \times \left(\frac{3}{10}\right)^2 = \frac{3087}{10000}$.

Exercice 7.5 1.a) Sous les hypothèses indiquées, le modèle est un schéma de Bernoulli d'ordre n .

1.b) La variable aléatoire X qui indique le nombre de filles suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n; \frac{1}{2})$.

2.a) $\bar{A}$ signifie "Aucune fille n'est née lors des n naissances", c'est-à-dire " $X = 0$ ".

2.b) $P(\bar{A}) = \binom{n}{0} \times (\frac{1}{2})^0 \times (\frac{1}{2})^n$, soit $P(\bar{A}) = \frac{1}{2^n}$. Ainsi, $P(A) = 1 - \frac{1}{2^n}$.

2.c) $P(A) > 0,99 \Leftrightarrow 2^n > 100$. La suite $(2^n)_{n \geq 1}$ est strictement croissante. Or : $2^6 = 64$ et $2^7 = 128$. Donc pour tout entier n tel que $n \geq 7$, $2^n \geq 2^7 > 100$.

Ainsi, le plus petit entier solution est $n_0 = 7$. La famille doit avoir au moins 7 enfants pour que la probabilité d'avoir une fille dépasse 0,99.

Exercice 7.6 Triangle de Pascal :

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	56	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

a) On lit dans le triangle de Pascal : $\binom{n}{2} = 36$ pour $n = 9$.

b) On utilise les colonnes donnant $\binom{n}{4}$ et $\binom{n}{2}$.

$3\binom{10}{4} = 3 \times 210 = 630$, et $14\binom{10}{2} = 14 \times 45 = 630$, d'où $n = 10$.

Remarque : l'expression des $\binom{n}{k}$ en fonction de n et de k , c'est-à-dire $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \times (n-k)!}$, n'est pas au programme, c'est pourquoi nous utilisons ici le triangle de Pascal.

L'unicité de la solution trouvée est donc admise.